ENS

3e ANNÉE

INFORMATIQUE

DURÉE : 5 heures

Ce problème comporte 4 parties indépendantes. La plupart des questions peuvent être traitées en admettant les résultats des questions précédentes.

Un alphabet A est un ensemble fini de symboles appelés lettres. Un mot fini (resp. infini) sur l'alphabet A est une suite non vide finie $u(1), u(2), \ldots, u(n)$ (resp. infinie $u(1), u(2), \ldots$) d'éléments de A. Ce mot sera noté simplement $u = u(1)u(2)\cdots u(n)$ (resp. $u = u(1)u(2)\cdots$). Le sous ensemble de A constitué des lettres ayant au moins une occurrence (resp. une infinité d'occurrences) dans le mot u est appelé alphabet (resp. alphabet à l'infini) du mot u et est noté $\mathrm{alph}(u)$ (resp. $\mathrm{alphinf}(u)$). L'ensemble de tous les mots finis (resp. infinis, finis ou infinis) sur l'alphabet A est noté A^+ (resp. A^ω, A^∞). La concaténation d'un mot fini $u = u(1)u(2)\cdots u(n)$ et d'un mot fini ou infini $v = v(1)v(2)\cdots$ est le mot fini ou infini $u(1)u(2)\cdots u(n)v(1)v(2)\cdots$ noté $u \cdot v$ ou simplement uv.

Exemple: Soit $A = \{a, b\}$, $u = aba$ et $v = bbb$ deux mots finis et $w = abb\cdots$ le mot infini défini par $w(1) = a$ et $w(i) = b$ pour $i > 1$. On a alors $\mathrm{alph}(u) = \{a, b\}$, $\mathrm{alphinf}(u) = \emptyset$, $\mathrm{alph}(v) = \{b\}$, $\mathrm{alphinf}(v) = \emptyset$, $\mathrm{alph}(w) = \{a, b\}$ et $\mathrm{alphinf}(w) = \{b\}$. De plus, $uv = ababbb$, $vu = bbbaba$ et $uw = abaabb\cdots$.

I Combinatoire

1) Montrer que tout mot $u \in A^\omega$ se décompose en $u = xy$ avec $\mathrm{alph}(u) = \mathrm{alph}(x)$ et $\mathrm{alphinf}(u) = \mathrm{alph}(y)$. Cette décomposition est-elle unique ?

2) Donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'un quadruplet $(x, y, z, t) \in A^+ \times A^\infty \times A^+ \times A^\infty$ vérifie $xy = zt$.

3) Un mot $u \in A^\omega$ est dit ultimement périodique s'il existe un entier $p > 0$ vérifiant

$$\exists n_0 \geq 0, \forall n \geq n_0, \quad u(n+p) = u(n). \tag{1}$$

Un entier $p > 0$ vérifiant (1) est appelé période ultime de u. Par exemple, le mot infini $aababababab\cdots$ est ultimement périodique et admet 2, 4, 8, ... comme périodes ultimes.

a) Existe-t-il des mots infinis qui ne sont pas ultimement périodiques ? Justifier votre réponse.

b) Montrer que si p et q sont deux périodes ultimes de u alors $\mathrm{pgcd}(p, q)$ est aussi une période ultime de u.

4) On définit dans A^ω une opération interne σ, appelée décalage, de la façon suivante : pour tout $u \in A^\omega$,

$$\forall n \geq 1 \qquad \sigma(u)(n) = u(n+1)$$

a) Discuter l'injectivité et la surjectivité de σ selon l'alphabet A.

b) Caractériser les mots infinis ultimement périodiques à l'aide de l'opération de décalage σ.

Un langage de mots finis (resp. infinis) est un sous ensemble de A^+ (resp. de A^ω). L'opération de concaténation se généralise naturellement aux langages en posant pour $K \subseteq A^+$ et $K' \subseteq A^\infty$

$$K \cdot K' = \{uv \mid u \in K \text{ et } v \in K'\}.$$

On définit alors par récurrence les puissances d'un langage $K \subseteq A^+$ en posant $K^1 = K$ et $K^{n+1} = K \cdot K^n$ pour $n \geq 1$. La réunion des puissances d'un langage $K \subseteq A^+$ est appelé itération de K et noté $K^+ = \bigcup_{n \geq 1} K^n$. Finalement, si $K \subseteq A^+$, on note $K^\omega = \{u_1 u_2 \cdots \mid \forall i \geq 1, u_i \in K\}$ l'ensemble des mots infinis obtenus en concaténant une infinité de mots de K.

Exemple: Soit $A = \{a, b\}$, $K = \{a, ab\}$ et $K' = \{a, ba\}$. Alors on a

$$\begin{aligned} K \cdot K' &= \{aa, aba, abba\} \\ K^+ &= \{u \in A^+ \mid u(1) = a \text{ et } \forall i \geq 2, u(i) = b \Longrightarrow u(i-1) = a\} \\ K'^\omega &= \{u \in A^\omega \mid \forall i \geq 1, u(i) = b \Longrightarrow u(i+1) = a\} \end{aligned}$$

Un automate est un sextuplet $\mathcal{A} = (A, Q, I, F, R, T)$ où A est un alphabet, Q un ensemble fini d'états, $I \subseteq Q$ l'ensemble des états initiaux, $F \subseteq Q$ l'ensemble des

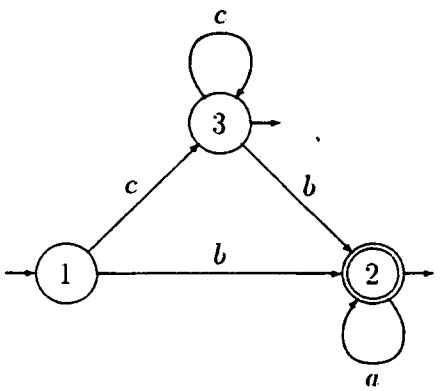

Figure 1: Un automate

états acceptants, $R \subseteq Q$ l'ensemble des états répétés et $T \subseteq Q \times A \times Q$ est l'ensemble des transitions. L'automate $\mathcal{A}$ est déterministe si I est un singleton et si pour tout couple $(q, a) \in Q \times A$ il existe au plus un état $q' \in Q$ tel que $(q, a, q') \in T$. Un chemin fini (resp. infini) de $\mathcal{A}$ est une suite de la forme $C = q_0, a_1, q_1, a_2, q_2, \ldots, a_n, q_n$ (resp. $C = q_0, a_1, q_1, a_2, q_2, \ldots$) telle que $(q_{i-1}, a_i, q_i) \in T$ pour tout $1 \leq i \leq n$ (resp. $i \geq 1$). L'étiquette du chemin C est le mot fini $\ell(C) = a_1 a_2 \cdots a_n$ (resp. infini $\ell(C) = a_1 a_2 \cdots$). Le chemin C est accepté s'il part d'un état initial et arrive dans un état acceptant (resp. et passe une infinité de fois par un état répété). L'ensemble

des mots finis (resp. infinis) qui sont l'étiquette d'au moins un chemin accepté de $\mathcal{A}$ est noté $L_+(\mathcal{A})$, (resp. $L_\omega(\mathcal{A})$). On dit que ces langages sont reconnus par l'automate $\mathcal{A}$. L'ensemble des langages $K \subseteq A^+$ (resp. $K \subseteq A^\omega$) qui peuvent être reconnus par un automate est noté $\mathrm{Rec}(A^+)$ (resp. $\mathrm{Rec}(A^\omega)$). Finalement, un langage $K \subseteq A^\omega$ est dit ω-rationnel s'il peut s'écrire comme une union finie de langages de la forme $X \cdot Y^\omega$ où $X, Y \in \mathrm{Rec}(A^+)$.

Exemple: Soit l'automate

$$\mathcal{A} = (\{a,b,c\}, \{1,2,3\}, \{1\}, \{2,3\}, \{2\}, \{(1,b,2),(1,c,3),(2,a,2),(3,b,2),(3,c,3)\})$$

(voir Figure 1). La suite $C = 1,c,3,b,2,a,2$ est un chemin fini accepté de $\mathcal{A}$ d'étiquette $\ell(C) = cba$. Le chemin infini $1,b,2,a,2,a,2,\cdots$ accepte le mot infini $baa\cdots$. Par contre le chemin infini $1,c,3,c,3,c,3,\cdots$ n'est pas accepté. Les langages reconnus par l'automate $\mathcal{A}$ sont :

$$\begin{aligned} L_+(\mathcal{A}) &= \{b\} \cup \{b\} \cdot \{a\}^+ \cup \{c\}^+ \cdot \{b\} \cup \{c\}^+ \cdot \{b\} \cdot \{a\}^+ \cup \{c\}^+ \\ L_\omega(\mathcal{A}) &= \{b\} \cdot \{a\}^\omega \cup \{c\}^+ \cdot \{b\} \cdot \{a\}^\omega \end{aligned}$$

II Théorème de Büchi

1) Donner un automate $\mathcal{A}$ tel que $L_\omega(\mathcal{A}) = \{a,b\}^+ \cdot \{b\}^\omega$.

2) Donner un automate déterministe $\mathcal{A}$ à trois états tel que

$$L_\omega(\mathcal{A}) = \{u \in \{a,b\}^\omega \mid \mathrm{alphinf}(u) = \{a,b\}\}$$

3) Soit $K \in \mathrm{Rec}(A^+)$ un langage reconnaissable de mots finis. Construire un automate qui reconnaît le langage de mots infinis K^ω.

4) Montrer que tout langage ω-rationnel peut être reconnu par un automate.

5) Réciproquement, montrer que tout langage de mots infinis reconnu par automate est ω-rationnel.

III Langages déterministes

1) Etant donnés deux automates déterministes $\mathcal{A}_1$ et $\mathcal{A}_2$, construire des automates déterministes qui reconnaissent les langages $L_\omega(\mathcal{A}_1) \cup L_\omega(\mathcal{A}_2)$ et $L_\omega(\mathcal{A}_1) \cap L_\omega(\mathcal{A}_2)$.

2) Si $K \subseteq A^+$ est un langage de mots finis, on appelle limite du langage K le langage de mots infinis

$$\overrightarrow{K} = \{u \in A^\omega \mid u(1)u(2)\cdots u(n) \in K \text{ pour une infinité d'entiers } n\}$$

   a) Montrer que $\overrightarrow{\{a,b\}^+ \cdot \{b\}}$ est l'ensemble des mots u tels que $b \in \mathrm{alphinf}(u)$.

   b) Calculer $\overrightarrow{\{a,b\}^+}$ et $\overrightarrow{\{a\}^+ \cdot \{b\}}$.

   c) Montrer que le langage $\{a,b\}^+ \cdot \{a\}^\omega$ n'est pas limite d'un langage de mots finis.

d) L'ensemble $\{\overrightarrow{K} \mid K \subseteq A^+\}$ des limites des langages de mots finis est-il clos par union ? par complémentaire ?

3) Soit $\mathcal{A} = (A, Q, I, F, R, T)$ un automate déterministe tel que $F = R$. Montrer que $L_\omega(\mathcal{A}) = \overrightarrow{L_+(\mathcal{A})}$. Cette égalité est-elle encore vérifiée si $\mathcal{A}$ n'est pas déterministe?

4) Soit $K \in \mathrm{Rec}(A^+)$. Construire un automate déterministe $\mathcal{A}$ tel que $L_\omega(\mathcal{A}) = \overrightarrow{K}$.

5) Montrer que l'ensemble $\{\overrightarrow{K} \mid K \in \mathrm{Rec}(A^+)\}$ des limites des langages reconnaissables de mots finis est clos par union et intersection mais pas par complémentaire.

6) L'ensemble $\{\overrightarrow{K} \mid K \subseteq A^+\}$ des limites des langages de mots finis est-il clos par intersection ?

IV Algorithmique

L'objet de cette partie est d'écrire des algorithmes permettant certains traitements sur les automates. Pour chaque question, on commencera par décrire les structures de données utilisées et on justifiera leur adéquation à la question. Ensuite, on écrira les algorithmes répondant aux problèmes posés. Enfin, on calculera la complexité de chacun des algorithmes. Les algorithmes seront écrits dans un langage impératif. On est libre de changer de structure de données à chaque question. Si on utilise plusieurs fois une même structure de données, on pourra la décrire une seule fois mais il faudra justifier son adéquation pour chacune des questions où elle est utilisée.

1) Tester si un mot fini est accepté par un automate déterministe.

2) Même question sans supposer l'automate déterministe et bien sûr sans déterminiser l'automate.

3) Soit $\mathcal{A} = (A, Q, I, F, R, T)$ un automate. On dit qu'un état q est accessible à partir d'un état p s'il existe un chemin fini de $\mathcal{A}$ partant de p et arrivant dans q. Pour $S \subseteq Q$, calculer l'ensemble $\mathrm{acc}(S)$ des états accessibles à partir des états de S.

4) Etant donné un automate $\mathcal{A}$, calculer un automate déterministe $\mathcal{B}$ tel que $L_+(\mathcal{B}) = L_+(\mathcal{A})$. A-t-on aussi $L_\omega(\mathcal{B}) = L_\omega(\mathcal{A})$?